القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي المنفصل (س)

ويرمز لها بالرمز ت(س) وتسمى أيضاً الوسط الحسابي

وتحسب من العلاقة ت(س) = $\sum$ س × ل(س)

التباين

ويرمز له بالرمز ع^{٢}(س) ويحسب من العلاقة ع^{٢}(س) = $\sum$ س^{٢} × ل(س) − [ل(س)]^{٢}

تطبيق التعلم: المجموعة الاولى

(١) الجدول التالي يمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل (س)

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	٠,٣	٠,١٥	٠,٢	٠,٣٥

(أ) احسب القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي ت(س)

(ب) احسب الانحراف المعياري للمتغير العشوائي ع(س)

الحل

لحساب القيمة المتوقعة ت(س) اضرب كل قيمة للمتغير العشوائي س × احتمالها ثم قم بتجميع النواتج

ت(س) = ٠ × ٠,٣ + ١ × ٠,١٥ + ٢ × ٠,٢ + ٣ × ٠,٣٥ = ١,٦

ع^{٢}(س) = ٠ ^{٢} × ٠,٣ + ١ ^{٢} × ٠,١٥ + ٢ ^{٢} × ٠,٢ + ٣ ^{٢} × ٠,٣٥ − (١,٦)^{٢}

ع^{٢}(س) = ١,٥٤

الانحراف المعياري = $\sqrt{١,٥٤}$

ع(س) = ١,٢٤

(٢) الجدول التالي يمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل (س)

س	٢	٤	٦
ل(س)	٠,٣	٠,٣	٠,٤

(أ) احسب التباين للمتغير العشوائي ع^{٢}(س)

الحل

ت(س) = ٢ × ٠,٣ + ٤ × ٠,٣ + ٦ × ٠,٤ = ٤,٢

ع^{٢}(س) = ٢ ^{٢} × ٠,٣ + ٤ ^{٢} × ٠,٣ + ٦ ^{٢} × ٠,٤ − (٤,٢)^{٢}

ع^{٢}(س) = ٢,٧٦

تطبيق التعلم: المجموعة الثانية

(١) الجدول التالي يمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل (ص)

ص	٠	١	٢	٣	٤
ل(ص)	٠,٠٣	٢م	٠,٣٢	م	٠,٠٥

(أ) احسب قيمة م

(ب) احسب كل من ت(ص)، $ع^2$(ص)

الحل

٠,٠٣ + ٢م + ٠,٣٢ + ٢ + ٠,٠٥ = ١

٠,٤ + ٣م = ١

٣م = ١ - ٠,٤ = ٠,٦ بالقسمة على ٣

م = ٠,٢

ت(س) = ٠ × ٠,٠٣ + ١ × ٠,٤ + ٢× ٠,٣٢ + ٣ × ٠,٢+ ٤ × ٠,٠٥ = ١,٨٤

$ع^2$(س) = ٠^2 × ٠,٠٣ + ١^2 × ٠,٤ + ٢^2 × ٠,٣٢ + ٣^2 × ٠,٢ + ٤^2 × ٠,٠٥ – $(١,٨٤)^2$

$ع^2$(س) = ٠,٨٩٤٤

(٢) ح متغير عشوائي حيث ح ∈ { ١، ٣، ٦، ١٠} إذا علمت أن احتمالية حدوث قيم ح متساوية، فأوجد كل من ت(ح)، $ع^2$(ح)

الحل

احتمالية حدوث قيم ح متساوية أي كل منهم = ١ ÷ ٤ = ٠,٢٥

ح	١	٣	٦	١٠
ل(ح)	٠,٢٥	٠,٢٥	٠,٢٥	٠,٢٥

ت(س) = ١ × ٠,٢٥ + ٣ × ٠,٢٥ + ٦× ٠,٢٥ + ١٠ × ٠,٢٥= ٥

$ع^2$(س) = ١^2 × ٠,٢٥ + ٣^2 × ٠,٢٥ + ٦^2 × ٠,٢٥ + ١٠^2 × ٠,٢٥ – $(٥)^2$

$ع^2$(س) = ١١,٥

(٣) الجدول التالي يمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل (ف)

ف	١	٣	٩	م
ل(ف)	٠,٤	٠,٢٨	٠,١٤	٠,١٨

إذا علمت أن ت(ف) = ٥,٣٨ فأوجد قيمة كل من م، ع^2(ف)

الحل

نستخدم علاقة القيمة المتوقعة لإيجاد قيمة المجهول م

١× ٠,٤ + ٣ × ٠,٢٨ + ٩ × ٠,١٤ + ٠,١٨ م = ٥,٣٨

٢,٥ + ٠,١٨م = ٥,٣٨

٠,١٨ م = ٥,٣٨ – ٢,٥ = ٢,٨٨ بالقسمة على ٠,١٨

م = ٢,٨٨ ÷ ٠,١٨ = ١٦

ع^2(س) = ١ ^{2} × ٠,٤ + ٣ ^{2} × ٠,٢٨ + ٩ ^{2} × ٠,١٤ + ١٦ ^{2} × ٠,١٨ – (٥,٣٨) ^{2}

ع^2(س) = ٣١,٤

(٤) ر متغير عشوائي حيث ر ∈ { ١٠، ٢٠، ٧٠، ١٠٠} إذا علمت أن ل(ر) تتناسب مع قيم ر بين أن ت(ر) = ٧٧، وأوجد ع^2(ر)

الحل

معنى أن ل(ر) تتناسب مع ر أي ل(١٠) = ١٠ م وهكذا

∴ ١٠ م + ٢٠ م + ٧٠ م + ١٠٠ م = ١

∴ ٢٠٠ م =١

م = $\frac{١}{٢٠٠}$

ر	١٠	٢٠	٧٠	١٠٠
ل(ر)	$\frac{١٠}{٢٠٠}$	$\frac{٢٠}{٢٠٠}$	$\frac{٧٠}{٢٠٠}$	$\frac{١٠٠}{٢٠٠}$

يمكن كتابة القيم الاحتمالية في أبسط صورة

ت(ر) = ١٠ × $\frac{١٠}{٢٠٠}$ + ٢٠ × $\frac{٢٠}{٢٠٠}$ + ٧٠ × $\frac{٧٠}{٢٠٠}$ + ١٠٠ × $\frac{١٠٠}{٢٠٠}$ = ٧٧

ع^2(ر) = ١٠ ^{2}× $\frac{١٠}{٢٠٠}$ + ٢٠ ^{2}× $\frac{٢٠}{٢٠٠}$ + ٧٠ ^{2}× $\frac{٧٠}{٢٠٠}$ + ١٠٠ ^{2}× $\frac{١٠٠}{٢٠٠}$ - (٧٧) ^{2} = ٨٣١

(٥) رمي حجري نرد منتظمين وكان المتغير العشوائي (س) هو المضاعف المشترك الأصغر بين العددين الظاهرين على حجر النرد

(أ) أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س)

(ب) أوجد ت(س)، ل(س> ت(س))

(ج) احسب $\text{ع}^2\text{(س)}$



الحل

الرمية الثانية \ الرمية الاولى	١	٢	٣	٤	٥	٦
١	١	٢	٣	٤	٥	٦
٢	٢	٢	٦	٤	١٠	٦
٣	٣	٦	٣	١٢	١٥	٦
٤	٤	٤	١٢	٤	٢٠	١٢
٥	٥	١٠	١٥	٢٠	٥	٣٠
٦	٦	٦	٦	١٢	٣٠	٦

ويكون جدول التوزيع الاحتمالي

س	١	٢	٣	٤	٥	٦	١٠	١٢	١٥	٢٠	٣٠
ل(س)	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$

$\text{ت(س)} = 1\times\frac{1}{36} + 2\times\frac{3}{36} + 3\times\frac{3}{36} + 4\times\frac{5}{36} + 5\times\frac{3}{36} + 6\times\frac{9}{36} + 10\times\frac{2}{36} + 12\times\frac{4}{36} + 15\times\frac{2}{36} + 20\times\frac{2}{36} + 30\times\frac{2}{36}$

$\text{ت(س)} = 8\frac{5}{12}$

ل(س> ت(س))= ل(س=١٠) + ل(س=١٢) + ل(س=١٥) + ل(س=٢٠) + ل(س=٣٠)

$\text{ل(س> ت(س))} = \frac{2}{36} + \frac{4}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} = \frac{1}{3}$

$\text{ع}^2\text{(س)} = 1^2\times\frac{1}{36} + 2^2\times\frac{3}{36} + 3^2\times\frac{3}{36} + 4^2\times\frac{5}{36} + 5^2\times\frac{3}{36} + 6^2\times\frac{9}{36} + 10^2\times\frac{2}{36} + 12^2\times\frac{4}{36} + 15^2\times\frac{2}{36} + 20^2\times\frac{2}{36}$
$+ 30^2\times\frac{2}{36} - \left(8\frac{5}{12}\right)^2 = 49\frac{41}{48}$

(٦) اختير طالبان عشوائيًا من صف جامعي يتألف من ١٢ طالبة و١٨ طالبًا،

(أ) أوجد القيمة المتوقعة لعدد الطالبات، والقيمة المتوقعة لعدد الطلاب.

(ب) اكتب نسبة القيمة المتوقعة لعدد الطالبات إلى القيمة المتوقعة لعدد الطلبة في أبسط صورة. ماذا تلاحظ على هذه النسبة.

(ج) احسب التباين لعدد الطالبات المختارات



الحل

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الذي يمثل عدد الطلاب(و)

ل(و = ٠) = $\frac{\binom{١٨}{٠}\times\binom{١٢}{٢}}{\binom{٣٠}{٢}} = \frac{٢٢}{١٤٥}$

ل(و = ١) = $\frac{\binom{١٨}{١}\times\binom{١٢}{١}}{\binom{٣٠}{٢}} = \frac{٧٢}{١٤٥}$

ل(و = ٢) = $\frac{\binom{١٨}{٢}\times\binom{١٢}{٠}}{\binom{٣٠}{٢}} = \frac{٥١}{١٤٥}$

ويكون جدول التوزيع الاحتمالي

و	٠	١	٢
ل(و)	$\frac{٢٢}{١٤٥}$	$\frac{٧٢}{١٤٥}$	$\frac{٥١}{١٤٥}$

ت(و) = ٠ × $\frac{٢٢}{١٤٥}$ + ١ × $\frac{٧٢}{١٤٥}$ + ٢ × $\frac{٥١}{١٤٥}$ = ١,٢

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الذي يمثل عدد الطالبات (ب)

ل(ب = ٠) = $\frac{\binom{١٨}{٢}\times\binom{١٢}{٠}}{\binom{٣٠}{٢}} = \frac{٥١}{١٤٥}$

ل(ب = ١) = $\frac{\binom{١٨}{١}\times\binom{١٢}{١}}{\binom{٣٠}{٢}} = \frac{٧٢}{١٤٥}$

ل(ب = ٢) = $\frac{\binom{١٨}{٠}\times\binom{١٢}{٢}}{\binom{٣٠}{٢}} = \frac{٢٢}{١٤٥}$

ويكون جدول التوزيع الاحتمالي

ب	٠	١	٢
ل(ب)	$\frac{٥١}{١٤٥}$	$\frac{٧٢}{١٤٥}$	$\frac{٢٢}{١٤٥}$

ت(ب) = ٠ × $\frac{٥١}{١٤٥}$ + ١ × $\frac{٧٢}{١٤٥}$ + ٢ × $\frac{٢٢}{١٤٥}$ = ٠,٨

نلاحظ أن النسبة بين عدد الطلاب الى عدد الطالبات = النسبة بين القيمة المتوقعة لعدد الطلاب الى القيمة المتوقعة لعدد الطالبات

$ع^٢$(ب) = $٠^٢ \times \frac{٥١}{١٤٥} + ١^٢ \times \frac{٧٢}{١٤٥} + ٢^٢ \times \frac{٢٢}{١٤٥} - (٠,٨)^٢$ = ٠,٤٦٣

(٧) تحتوي سلة على ٨ بكرات قطن: ٤ منها خُضر، و٣ حُمر، وواحدة صفراء. اختيرت ٣ بكرات قطن عشوائيًا من السلة

(أ) بيّن أن القيمة المتوقعة للبكرة الصفراء هي ٠,٣٧٥

(ب) أوجِد القيمة المتوقعة لعدد البكرات الحُمر

(ج) أوجِد القيمة المتوقعة لعدد البكرات الخُضر

الحل

عند اختيار ٣ بكرات فإن قيم المتغير العشوائي (ص) الذي يمثل عدد البكرات الصفراء = {٠، ١}

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الذي يمثل عدد البكرات الصفراء (ص)

ل(ص = ٠) = $\frac{\binom{1}{0}\times\binom{7}{3}}{\binom{8}{3}}$ = ٠,٦٢٥

ل(ص = ١) = $\frac{\binom{1}{1}\times\binom{7}{2}}{\binom{8}{3}}$ = ٠,٣٧٥

ويكون جدول التوزيع الاحتمالي

ص	٠	١
ل(و)	٠,٦٢٥	٠,٣٧٥

ت(ص) = ٠ × ٠,٦٢٥ + ١ × ٠,٣٧٥ = ٠,٣٧٥

الاحتمالي للمتغير العشوائي الذي يمثل عدد البكرات الحمر (ح)

ل(ح = ٠) = $\frac{\binom{3}{0}\times\binom{5}{3}}{\binom{8}{3}}$ = $\frac{5}{28}$

ل(ح = ١) = $\frac{\binom{3}{1}\times\binom{5}{2}}{\binom{8}{3}}$ = $\frac{15}{28}$

ل(ح = ٢) = $\frac{\binom{3}{2}\times\binom{5}{1}}{\binom{8}{3}}$ = $\frac{15}{56}$

ل(ح = ٣) = $\frac{\binom{3}{3}\times\binom{5}{0}}{\binom{8}{3}}$ = $\frac{1}{56}$

ويكون جدول التوزيع الاحتمالي

ح	٠	١	٢	٣
ل(ح)	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

ت(ح) = ٠ × $\frac{5}{28}$ + ١ × $\frac{15}{28}$ + ٢ × $\frac{15}{56}$ + ٣ × $\frac{1}{56}$ = ١,١٢٥

وبنفس الطريقة السابقة يمكنك حساب القيمة المتوقعة لعدد البكرات الخُضر

(٨) رُمي حجر نرد، إذا ظهر على وجه حجر النرد عدد فردي يحصل اللاعب على درجة (س) تساوي ذلك العدد، وإذا ظهر عدد زوجي يُعيد اللاعب رمي حجر النرد:

-إذا ظهر عدد فردي في الرمية الثانية يحصل اللاعب على درجة تساوي ذلك العدد.

-إذا ظهر في الرمية الثانية عدد زوجي يحصل اللاعب على درجة تساوي نصف ذلك العدد الزوجي.

(أ) سجّل قيم (س) الممكنة وأنشئ جدول التوزيع الاحتمالي له.

(ب) أوجد ل(س> ت(س))

(ج) احسب قيمة $ع^2$(س)



الحل

الرمية الثانية \ الرمية الاولى	١	٢	٣	٤	٥	٦
١	١	١	٣	١	٥	١
٢	١	١	٣	١	٥	١
٣	١	٣	٣	٣	٥	٣
٤	١	٢	٣	٢	٥	٢
٥	١	٥	٣	٥	٥	٥
٦	١	٣	٣	٣	٥	٣

ويكون جدول التوزيع الاحتمالي

س	١	٢	٣	٥
ل(س)	$\frac{١٢}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{١٢}{٣٦}$	$\frac{٩}{٣٦}$

ت(س) = ١ × $\frac{١٢}{٣٦}$ + ٢ × $\frac{٣}{٣٦}$ + ٣ × $\frac{١٢}{٣٦}$ + ٥ × $\frac{٩}{٣٦}$ = ٢,٧٥

ل(س> ٢,٧٥) = ل(س= ٣) + ل(س=٥)

ل(س> ٢,٧٥) = $\frac{١٢}{٣٦}$ + $\frac{٩}{٣٦}$ = $\frac{٧}{١٢}$

$ع^2$(س) = ١^2 × $\frac{١٢}{٣٦}$ + ٢^2 × $\frac{٣}{٣٦}$ + ٣^2 × $\frac{١٢}{٣٦}$ + ٥^2 × $\frac{٩}{٣٦}$ = ٢ $\frac{١٧}{٤٨}$